PSI
Mathématiques · Informatique
2024

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (de Lyon)

Florian Metzger
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Jason Bridoux
professeur agrégé

Sélim Cornet
professeur en CPGE

Sarah Houdaigoui
ENS Ulm

Vincent Lerouvillois
ENS de Lyon

Thierry Limoges
professeur en CPGE

Malory Marin
ENS de Lyon

Théotime Moutte
professeur agrégé

Nicolas Nelson
ENS Ulm

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Quentin Vermande
ENS Ulm

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2024 **PSI8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

e3a Mathématiques PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Théotime Moutte (ENS de Lyon) ; il a été relu par Hai Châu Nguyên (ENS de Lyon) et Angèle Niclas (enseignant-chercheur).

Ce sujet offre un panorama assez complet des objets et techniques du programme de mathématiques. Chaque exercice est indépendant et fait appel à une partie différente du programme.

- Le premier exercice présente une matrice aléatoire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et propose de calculer la probabilité qu'elle soit inversible ou diagonalisable. Ceci nécessite la manipulation de polynômes, de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et de probabilités.
- Dans le deuxième exercice, on étudie un endomorphisme de l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^0([\,0\,;1\,])$ défini par une intégrale. Bien que l'on étudie les propriétés algébriques de cette application (injectivité, image, valeurs propres), les démonstrations font principalement intervenir des notions d'analyse telles que des calculs d'intégrales ou des équations différentielles.
- Le troisième exercice propose de déterminer les valeurs propres d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse d'abord à des cas particuliers afin de se familiariser avec les objets et d'en déduire certaines propriétés, puis on étudie le cas général.
- Le dernier exercice propose d'étudier une suite d'intégrales et d'en déterminer un équivalent. Les raisonnements font intervenir une grande variété de techniques utilisées en intégration et dans l'étude de séries, notamment des théorèmes de convergence dominée, des développements de Taylor et des intégrales de Riemann.

Les thématiques abordées sont très variées, ce qui fait de ce sujet une bonne base de révision des points clefs. Tous les calculs et techniques employés sont très classiques et demandent une maîtrise des principaux théorèmes de spé, ce qui fournit une bonne occasion de tester ses connaissances.

SESSION 2024 **PSI1M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux problèmes et d'un exercice indépendants.
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.

CCINP Maths PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jason Bridoux (ENS de Lyon) ; il a été relu par Christophe Fiszka (professeur en CPGE) et Angèle Niclas (enseignant-chercheur).

Le sujet comporte deux problèmes et un exercice, tous indépendants.

- Le premier problème s'intéresse au comportement probabiliste de la file d'attente d'un restaurant. Dans ce modèle, un client est servi après une attente qui suit une loi de Poisson et, à chaque instant, un nouveau client arrive dans la file avec une probabilité p. Grâce à l'étude d'une suite récurrente, on établit un critère permettant de calculer la probabilité que la file d'attente soit vide durant un instant.
- Dans l'exercice, on établit l'équivalent de la factorielle (équivalent de Stirling) par l'étude de la fonction Gamma définie par

  $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

  Comme souvent, le plus difficile est de déterminer la constante de l'équivalent.
- Enfin, le second problème traite des matrices de Jordan, plus particulièrement de leurs éléments propres et leurs sous-espaces stables. Ces résultats permettent, en partie, de déterminer les solutions d'un système différentiel linéaire et de donner un critère quant à l'existence de solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Ce sujet mobilise plusieurs notions du programme de PSI, notamment les probabilités, les séries entières, l'intégration, l'algèbre linéaire et les systèmes différentiels. La maîtrise des suites récurrentes et des comparaisons de suites, vues en première année, est indispensable pour le traiter correctement. L'énoncé est plutôt linéaire et comporte beaucoup de questions intermédiaires. Ainsi, il est sans difficulté notable mis à part quelques questions techniques. C'est un bon sujet pour commencer ses révisions.

SESSION 2024 **PSI5IN**

ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

INFORMATIQUE

Durée : 3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties.

L'épreuve est à traiter en langage **Python** sauf pour les bases de données.
Les différents algorithmes doivent être rendus dans leur forme définitive sur le **Document Réponse** dans l'espace réservé à cet effet en respectant les éléments de syntaxe du langage (les brouillons ne sont pas acceptés).
La réponse ne doit pas se limiter à la rédaction de l'algorithme sans explication, les programmes doivent être expliqués et commentés de manière raisonnable.

Énoncé et Annexe : 16 pages
Document Réponse : 12 pages

Seul le Document Réponse doit être rendu dans son intégralité (le QR Code doit être collé sur la première page de ce Document Réponse).

CCINP Informatique PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Malory Marin (ENS de Lyon) ; il a été relu par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Le sujet aborde un jeu de stratégie de la famille des jeux de semailles, l'awalé. Le but est d'implémenter en Python une version du jeu et de programmer une intelligence artificielle pour ce jeu basée sur l'algorithme MinMax.

- La partie I présente les règles du jeu. Le but est de comprendre, via des exemples, leurs subtilités. Cette partie est cruciale pour la compréhension du reste du sujet.
- La partie suivante propose d'implémenter des fonctions correspondant à une partie entre deux joueurs humains. On écrit d'abord des fonctions permettant de représenter le jeu via un dictionnaire. Ensuite, on implémente un tour de jeu en trois étapes : tester si le coup souhaité est valide, mettre à jour le plateau et enfin tester si la partie est finie.
- Dans la partie III, on programme une intelligence artificielle pour le jeu. On utilise pour cela une variante de l'algorithme MinMax appelée NegaMax. L'algorithme consiste à simuler les gains potentiels dans un arbre des possibilités à profondeur fixe, puis à sélectionner le meilleur coup trouvé. Le sujet commence par tester la compréhension de l'algorithme sur un exemple avant de le programmer réellement. La fin du sujet consiste à écrire des requêtes dans une base de données relationnelle.

Ce sujet est une belle introduction à la théorie des jeux mais demande initialement un effort conséquent de compréhension des règles. L'implémentation de la structure du jeu est ensuite assez directe, sans réelle difficulté algorithmique. La troisième partie est parfaite pour comprendre l'algorithme MinMax en profondeur. De nombreuses fois, il est demandé de compléter une fonction plutôt que de donner une implémentation complète. Cela permet de se concentrer sur la compréhension des algorithmes plutôt que sur les difficultés techniques de la structuration d'un programme.

Comme l'année dernière, les réponses se font exclusivement sur un document réponse unique, ce qui peut perturber les candidats : la place disponible pour chaque explication et chaque code est fortement contrainte, et l'erreur conduisant à une réécriture massive est quasiment interdite. Nous vous conseillons donc de vous entraîner au cours de l'année à utiliser correctement un brouillon, et à rendre des copies concises et sans rature.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

2024

4 heures Calculatrice autorisée

Notations

— On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

— Tout au long du sujet, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sera identifié à sa fonction polynomiale.

— Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue est dite intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge.

— Pour une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle $\mathrm{vect}(\mathrm{P_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N})$ l'espace vectoriel engendré par cette famille, c'est à dire :

$$\mathrm{vect}(\mathrm{P_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}) = \left\{\mathrm{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \exists (\mathrm{a_0}, ..., \mathrm{a_N}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N+1}}, \mathrm{g} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{N}} \mathrm{a_k P_k}\right\}$$

Le sujet illustre des applications du calcul de l'intégrale de Gauss dans différents domaines.

La partie I est consacrée au calcul de cette intégrale.

La partie II est consacrée à la résolution d'une équation différentielle du second ordre à l'aide des séries entières. Elle utilise le résultat final de la partie I. Elle est totalement indépendantes des deux parties suivantes.

La partie III est consacrée à l'étude d'un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}[X]$ et d'une suite de polynômes orthogonaux associés à cet endomorphisme. Elle est indépendante de la partie II.

La partie IV est consacrée à montrer des propriétés sur la famille de polynômes construite à la partie III. Le but est d'établir que c'est une famille totale d'un espace préhilbertien. Ce résultat est en fait un résultat général dans la théorie des espaces de Hilbert.

I Partie I : Intégrale de Wallis et Intégrale de Gauss

I.A – On définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$.

Q 1. Étudier la monotonie de la suite (W_n).

Q 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Q 3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Q 4. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

I.B – On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Q 5. Justifier l'existence de I.

Q 6. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = I$.

Centrale Maths 1 PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Nelson (ENS Ulm) ; il a été relu par Jason Bridoux (ENS de Lyon) et Simon Billouet (professeur en CPGE).

Le sujet est consacré à l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

et à quelques-unes de ses applications, notamment en algèbre linéaire. Calculatoire mais tout à fait abordable, il relie plusieurs exercices classiques de CPGE : intégrales de Wallis, polynômes d'Hermite et transformée de Fourier. Il permet de réviser des techniques de calcul essentielles comme l'intégration par parties, le théorème d'intégration terme à terme et quelques inégalités d'analyse.

- Dans la partie I, on utilise les intégrales de Wallis pour calculer l'intégrale de Gauss. Les résultats classiques sur les intégrales de Wallis sont redémontrés étape par étape dans les premières questions. Cette partie est élémentaire, c'est un bon échauffement.
- La partie II est consacrée à la résolution d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ à l'aide de séries entières et d'une intégrale à paramètre. Elle est indépendante des autres parties et, contrairement à ce qu'indique l'énoncé, ne nécessite pas le résultat final de la partie I. La question 9 est difficile.
- La partie III introduit une suite de polynômes à coefficients réels, les polynômes d'Hermite, ainsi qu'un produit scalaire sur un espace de fonctions lié à l'intégrale de Gauss. On démontre que les polynômes d'Hermite forment une famille orthogonale pour ce produit scalaire, puis qu'ils sont vecteurs propres d'un certain endomorphisme autoadjoint. Cette partie est longue mais très guidée et elle ne comprend pas de question difficile.
- Dans la partie IV, on montre à l'aide de la transformée de Fourier que les polynômes d'Hermite forment en fait une famille orthogonale totale de l'espace préhilbertien précédent. La partie est assez courte, mais la question 38 demande de la réflexion.

Ce sujet est idéal pour réviser plusieurs thèmes qui tombent régulièrement aux concours : l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les théorèmes d'intégration et les polynômes. Par ailleurs, les parties I et III, les plus longues, sont constituées d'exercices classiques qu'il faut avoir faits au moins une fois. Ce sujet est donc un excellent choix pendant les révisions.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2024

4 heures Calculatrice autorisée

Autour de la série harmonique et de la constante d'Euler

Dans toute ce problème, on désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Le but de ce problème est dans un premier temps de s'assurer de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis d'essayer de déterminer différentes expressions de sa limite, à l'aide d'intégrales.

I Convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q 1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la différence $a_{n+1} - a_n$, puis déterminer la nature de la série numérique $\sum (a_{n+1} - a_n)$.

Q 2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel que l'on notera γ pour toute la suite du problème, puis que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

II Application au problème du collectionneur de vignettes

Pour augmenter ses ventes, un industriel de l'agro-alimentaire qui commercialise des paquets de céréales pour le petit déjeuner décide d'insérer au fond du paquet une figurine de sportifs célèbres. Le modèle de figurine inséré dans le paquet est choisi de manière équiprobable parmi n modèles de référence.

Pour différencier les n modèles de figurines et les identifier de manière unique, on considèrera que chaque modèle de figurine porte un numéro unique entre 1 et n.

Chaque paquet de céréales contient ainsi une figurine à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet. On se demande combien un consommateur, que l'on va appeler ici le " collectionneur ", doit ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n figurines.

On décompose ce nombre de paquets N_n en $N_n = \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_n$ où τ_k est le nombre de paquets supplémentaires nécessaires pour obtenir k figurines différentes quand on en a déjà $k-1$ différentes.

Dans tout ce qui suit, on désignera par $C_k^{(i)}$ lévénénement "le collectionneur découvre dans le k^{e} paquet la figurine numérotée i "

Q 3. Déterminer la loi de N_1.

Q 4. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Quelle est la probabilité de l'événement C : "le collectionneur obtient toujours la même vignette au cours de ses m premiers achats" ?

En déduire que : $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N_2 > m) = \dfrac{1}{n^{m-1}}$.

Q 5. Déterminer alors la loi de N_2.

Centrale Maths 2 PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Soenen (ENS de Lyon) et Simon Billouet (professeur en CPGE).

Ce sujet d'analyse et probabilités est composé de sept parties quasiment indépendantes lorsqu'on admet les résultats des précédentes. On y étudie la constante d'Euler γ.

- La première partie définit γ et donne un développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique.
- La partie II est un problème de probabilités qui s'intéresse au nombre de boîtes à ouvrir pour découvrir k objets distincts, chaque boîte contenant un objet aléatoire parmi n possibles. Le résultat de la partie I n'est utile que pour la question 7.
- La troisième partie propose une expression de γ sous la forme d'une intégrale généralisée. On y utilise le théorème d'intégration terme à terme.
- Dans la partie IV, on trouve une autre expression intégrale de γ en utilisant cette fois le théorème de convergence dominée.
- Dans la partie V, on établit deux autres expressions intégrales de γ à partir de la fonction spéciale Γ définie par l'intégrale à paramètre

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

- La partie VI fournit une valeur approchée de γ à l'aide de séries entières et alternées ainsi que du résultat de la partie IV.
- Enfin, dans la partie VII, on s'intéresse aux trois séries entières de rayon de convergence égal à 1, notamment aux voisinages de -1 et de 1 :

$$\sum \ln(n)x^n$$

$$\sum \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

et

$$\sum \left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right)x^n$$

L'épreuve balaye un large éventail du programme d'analyse de prépa, comme les séries de fonctions et l'intégration. Il est de difficulté progressive et très long comme c'est souvent le cas à Centrale. Bien que la typographie de l'énoncé soit bâclée, c'est un bon sujet de révision.

A2024 – MATH I PSI

Concours commun
Mines-Ponts

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Maths 1 PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Lerouvillois (professeur agrégé à l'université) ; il a été relu par Théotime Moutte (ENS Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Le sujet propose une définition mathématique de l'entropie à partir de l'intégrale généralisée de fonctions dites « à croissance lente ». L'objectif est d'en établir une majoration connue sous le nom d'inégalité de log-Sobolev.

- Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des fonctions à croissance lente (intégrabilité, stabilité de l'ensemble par certaines opérations...) et de certaines intégrales à paramètre définies à partir de fonctions à croissance lente.
- La deuxième partie aborde la régularité des intégrales définies dans la partie précédente par rapport à leurs différents paramètres et établit une relation entre leurs dérivées partielles.
- La dernière partie définit l'entropie pour certaines fonctions à croissance lente et établit l'inégalité de log-Sobolev au moyen de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des résultats établis dans les parties précédentes.

Le problème est très bien guidé, progressif et centré sur la notion d'intégrales généralisées du programme d'analyse de PC. La plupart des résultats sophistiqués étant admis, le sujet ne présente pas de réelle difficulté. Néanmoins, il nécessite de savoir majorer efficacement certaines fonctions dans le but d'appliquer les principaux théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.

A2024 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Maths 2 PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Ingelaere (École Polytechnique) et Angèle Niclas (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet d'analyse et de probabilités porte sur la notion d'indice d'égalité dans une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Partant du point 0, on se déplace d'une unité vers la gauche ou vers la droite avec la même probabilité, cette opération étant répétée n fois. On cherche à calculer un équivalent du nombre moyen de fois où l'on passe par 0 lorsque n tend vers l'infini.

- Dans la partie I, on étudie le comportement asymptotique de certaines suites afin d'obtenir des limites et des équivalents qui seront utiles dans la partie suivante. Ces résultats sont obtenus principalement à l'aide de sommes de Riemann, mais pour des fonctions continues et intégrables sur un intervalle ouvert, ce qui rend leur manipulation particulièrement délicate.
- Dans la partie II, qui est plus accessible, on calcule l'espérance du nombre de retours au point d'origine à l'aide de raisonnements probabilistes classiques. On détermine ensuite un équivalent de cette espérance. Le sujet s'achève par une étude similaire sur une marche aléatoire légèrement différente, où les déplacements sont cette fois-ci tirés sans remise.

Dès le début, le sujet se révèle ardu : les premières questions sont techniques, éloignées du cours et ont pu déstabiliser de nombreux candidats. La majorité des questions plus faciles se trouvent dans la seconde moitié du sujet. Si ce dernier permet de travailler les suites, séries, intégrales et probabilités, il conviendra toutefois surtout aux élèves ayant déjà une solide maîtrise de ces chapitres et désirant se tester sur une épreuve d'un format inhabituel.

A2024 – IC

Concours commun
Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE COMMUNE

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout autre dispositif électronique est interdit.

Cette épreuve est commune aux candidats des filières MP, PC et PSI.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

INFORMATIQUE COMMUNE

L'énoncé de cette épreuve comporte 12 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Malory Marin (ENS de Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet traite de la communication de chaînes de caractères à travers un canal non fiable. Deux points importants sont abordés : la compression des données et la correction après transmission des informations.

- Dans la partie I, on étudie le fonctionnement d'un codage arithmétique des chaînes de caractères, une méthode de compression qui transforme n'importe quelle chaîne en nombre décimal. Après quelques questions préliminaires portant sur la lecture analytique d'un texte et deux questions de SQL, on aborde plus spécifiquement l'algorithme de compression, pour le codage et le décodage, notamment à partir d'exemples.
- La partie II introduit en profondeur une technique de correction d'un message reçu, connaissant des probabilités d'émission et des probabilités conditionnelles de réception. On construit un graphe représentant l'ensemble des messages possibles, assimilable à des cases de tableaux à deux dimensions, et on essaie d'y trouver le chemin optimal par deux méthodes : un algorithme glouton et un algorithme de programmation dynamique, l'algorithme de Viterbi.

Le sujet est bien construit et très progressif. De nombreuses questions sont simples et permettent aux élèves de niveau modeste de vérifier leur capacité à enchaîner des réponses. Dans la deuxième partie, l'introduction du problème, longue mais intéressante et bien détaillée, offre la possibilité de coder sur le même graphe un algorithme glouton et un algorithme de programmation dynamique. De nombreuses questions de complexité complètent l'ensemble et font de ce sujet un bon entraînement.

ECOLES NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2024

LUNDI 15 AVRIL 2024
08h00 - 12h00
FILIERE PSI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XUSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Maths PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Quentin Vermande (ENS Ulm) ; il a été relu par Julie Gauthier (professeur agrégé) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Évaluer un polynôme en une matrice permet d'obtenir beaucoup d'informations sur cette dernière. Notamment, les polynômes caractéristique et minimal permettent de décrire les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice. Ce sujet propose d'étendre cette idée en évaluant une série entière en une matrice.

- La partie I décrit les matrices en lesquelles on peut évaluer une série entière donnée. C'est la partie qui repose le plus sur le cours consacré aux séries entières.
- La partie II définit le polynôme minimal d'une matrice, qui est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule cette matrice, puis l'utilise pour définir l'évaluation d'une série en une matrice. Viennent ensuite quelques exemples.
- La partie III traite le cas des matrices diagonalisables, où l'on peut faire le calcul par une méthode d'interpolation ou en diagonalisant la matrice.
- La partie IV propose deux matrices en lesquelles on peut évaluer en une série quelconque puis deux séries que l'on peut évaluer en n'importe quelle matrice.

Ce sujet repose essentiellement sur la réduction des endomorphismes, à l'exception de la première partie qui requiert de bien maîtriser les résultats de convergence des séries entières. Il demande principalement de manipuler avec rigueur les objets utilisés. Les applications directes du cours sont rares ; il faut le plus souvent déployer des techniques et astuces pour construire la preuve. La difficulté est croissante et la dernière partie est de loin la plus calculatoire.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2024

JEUDI 18 AVRIL 2024
16h30 - 18h30

FILIERES MP-MPI-PC-PSI
Epreuve n° 8

INFORMATIQUE B (XELSR)

Durée : 2 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2024 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et William Aufort (professeur en CPGE).

Le sujet examine les logimages, un jeu consistant à noircir les cases d'une grille en utilisant des indications données pour chaque ligne et chaque colonne. Il se compose de quatre parties, largement indépendantes et de difficulté croissante.

- La partie I vise à écrire et étudier diverses fonctions vérifiant la validité d'une solution.
- La partie suivante cherche à résoudre le problème à l'aide de fonctions récursives en explorant toutes les grilles possibles. Une analyse de complexité permet de montrer l'inefficacité de l'algorithme sur de grandes grilles.
- La partie III traite du placement d'un bloc dans une ligne dont certaines cases sont déjà déterminées. Cette partie est très courte (deux questions seulement) mais contient la question la plus difficile du sujet, l'élaboration d'un algorithme astucieux et un calcul de complexité extrêmement fin.
- La dernière partie utilise les résultats obtenus dans la partie III afin de déterminer les première et dernière positions possibles pour chaque bloc d'une ligne et en déduire la couleur de certaines cases.

Le sujet se focalise sur l'algorithmique des listes et des matrices et le calcul de complexité. Les trois premières questions de la partie I constituent un bon entraînement sur ces thèmes. La question 4 de la partie I permet de travailler la compréhension d'un code et de s'entraîner à vérifier la correction d'une fonction. La partie II permet d'aborder les algorithmes manipulant des matrices et les fonctions récursives. La difficulté majeure de la partie III réside dans la présence d'un calcul très fin et astucieux de complexité. Cette partie et la suivante comportent des questions algorithmiques et de complexité de haut niveau qui demandent une bonne compréhension des raisonnements de résolution des logimages.